

BI-ZDM – zápočtový test č. 1
varianta J

ZS 2021/2022, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: _____

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**

Ukažte a řádně zdůvodněte, že $n \ln(n) - n \cos(n) \in \omega(n)$.

2. (2 body) **Matematická indukce**

Ukažte, že pro všechna kladná přirozená čísla n platí, že

$$\sum_{i=1}^n (3i - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

3. (2 body) **Množiny**

Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:

$$\overline{A \cap B \cap C} = (A \setminus B) \cup \overline{(A \cap C)}$$

4. (2 body) **Zobrazení**

Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ daného předpisem

$$f(m, n) = (3m + n - 1, -4m - 5n).$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**

Definujme induktivně podmnožinu racionálních čísel S takto:

(P0) $5 \in S$,

(P1) je-li $m \in S$, pak také $5m \in S, m/5 \in S$,

a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina S neobsahuje. Dokažte tento vztah:

$$S = \{m : m \text{ je ve tvaru } 5^k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}\}.$$