

BI-ZDM – zápočtový test č. 1
varianta D

ZS 2019/2020, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: _____

Počet listů: _____

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**

Ukažte a řádně zdůvodněte, že $\lceil n^3(\ln(\sqrt{n})^3 - n^2) \rceil \in o(n^4)$

2. (2 body) **Matematická indukce**

Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou rekurentně takto: $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2}{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ukažte matematickou indukcí, že $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

3. (2 body) **Množiny**

Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:

$$B \cap C \cap ((B \cup C) \setminus A) = (C \cap B) \setminus A$$

4. (2 body) **Zobrazení**

Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ daného předpisem

$$f(m, n) = (2m + n + 1, -m - n).$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**

Definujme induktivně podmnožinu celých čísel S takto:

(P0) $12, 30 \in S$,

(P1) jsou-li $m, n \in S$, pak také $m + n \in S, m - n \in S$,

a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina S neobsahuje. Nalezněte k takové, že platí následující vztah, a tento vztah dokažte:

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ je dělitelné } k\}.$$